

ESTRATÉGIAS USADAS POR ALUNOS DO 7º ANO NA RESOLUÇÃO DE TAREFAS ESTATÍSTICAS

Andreia Filipa Teixeira Salgado Ribeiro

andreia.filipa.mat@gmail.com

Paulo Ferreira Correia

Escola Secundária/3 de Barcelos

ferreiracorreiapaulo@gmail.com

José António Fernandes

Universidade do Minho

jfernandes@ie.uminho.pt

Resumo

O presente artigo é baseado num estudo desenvolvido ao longo do estágio curricular e centra-se no estudo das estratégias de resolução usadas por alunos do 7º ano de escolaridade em tarefas estatísticas envolvendo os conceitos de média, moda e mediana. Este estudo foi desenvolvido numa turma do 7º ano de escolaridade, com 19 alunos, e recorreu-se ao trabalho de grupo, a tarefas abertas e a discussões coletivas como metodologias de ensino-aprendizagem. Os dados usados no estudo foram obtidos a partir de diversos métodos: inicialmente, os alunos resolveram uma ficha de avaliação diagnóstica apenas sobre conteúdos estatísticos; de seguida, recolheram-se todas as produções escritas dos alunos durante toda a intervenção, gravando em vídeo ainda todas as aulas; e, por fim, os alunos resolveram uma ficha de avaliação sobre as medidas de tendência central. Em termos de resultados, identificaram-se neste estudo, cinco tipos de estratégias de resolução: estratégia de tentativa-e-erro; estratégia de compensação; estratégia de representação gráfica; estratégia aritmética e, por fim, estratégia algébrica.

Palavras-chave: Tarefas estatísticas; Estratégias de resolução; Alunos do 7º ano.

Introdução

O facto do tema deste estudo recair sobre a Estatística surgiu da importância crescente atribuída a este tema na vida quotidiana dos cidadãos, que por sua vez se tem repercutido nos currículos nacionais de Matemática. Atualmente, basta abrir um jornal, uma revista ou ligar a televisão para sermos “bombardeados” com informação estatística do país e do mundo, o que releva a necessidade de formar cidadãos capazes de interpretar tal informação.

A Estatística é cada vez mais “uma ciência privilegiada no sentido em que é uma das áreas mais presentes na vida comum das pessoas” (Santos & Pedro, 2000, p. 177) e, por isso, é “essencial” que os cidadãos possuam conhecimentos de estatística para que compreendam a informação disponível (Carvalho, 2006). De acordo com Martins e Cerveira (1999), “é necessário estarmos aptos a saber ler e interpretar, assim como a utilizar convenientemente essa forma de transmitir a informação” (p. 9). Carvalho e César (2001) vão mais longe, afirmando que “ter conhecimentos de Estatística tornou-se uma inevitabilidade para exercer uma cidadania crítica, reflexiva e participativa, uma vez que, coletiva e individualmente, todos somos chamados a tomar decisões com base em análises críticas de dados” (pp. 65-66).

Uma ideia que evidencia, à luz da literatura, a relevância do estudo se inserir no tema Estatística resulta do facto de “para que os alunos sejam cidadãos inteligentes que possam tomar decisões de forma crítica e informada, são necessários conhecimentos de Estatística” (NCTM, 1991, p. 125). Por

outro lado, compreender o tipo de estratégias que os alunos usam na resolução de tarefas estatísticas e identificar as suas dificuldades, consoante se realiza no presente estudo, é da maior utilidade para a promoção de uma melhor aprendizagem dos alunos, bem como para o desenvolvimento profissional do professor.

1. O ensino da Estatística

Tal como já foi referido anteriormente, o tema deste estudo diz respeito às estratégias adotadas por alunos do 7º ano de escolaridade na resolução de tarefas estatísticas.

Na opinião de Branco (2006), “o ensino da estatística tem vindo a requerer mudanças” (p. 19) e os defensores da mudança sugerem uma “atitude que privilegia a compreensão dos conceitos fundamentais, que forma a base da estatística, e que dá relevo ao desenvolvimento do raciocínio estatístico” (Branco, 2006, p. 21). No entanto, os conteúdos de Estatística, nem sempre são apresentados aos alunos, ou “por falta de tempo ou por falta de convicção do seu real interesse” (Branco, 2000, p. 16), e por vezes são lecionados de uma forma insistente na rotina, na mecanização e na memorização (Lima, 1998). Na opinião de Carvalho (2006), “o facto de a Estatística ser ensinada na maioria dos países como um tópico na disciplina de Matemática faz com que seja frequentemente lecionada enfatizando-se a computação, as fórmulas e os procedimentos” (p. 5).

As tarefas assumem um papel importante na sala de aula uma vez que podem, quando bem construídas, suscitar a atividade do aluno (Ponte, 2005). Segundo Ponte (2005), “um único tipo de tarefa dificilmente atingirá todos os objetivos curriculares valorizados pelo professor” (p. 1). Além da seleção de tarefas diversificadas, o professor deve ter também em conta o tempo de realização e os materiais a usar, não esquecendo que as tarefas devem estimular “o sentido crítico dos alunos” (Fernandes, Carvalho & Ribeiro, 2007, p. 31). Acredita-se que “quando os alunos têm a oportunidade de se confrontar com tarefas e situações estatísticas não rotineiras revelam uma grande riqueza de estratégias de resolução o que mostra como constroem o significado estatístico” (Carvalho, 2006). Além disto, uma vez que o ensino da Estatística deve contribuir para que, no futuro, os alunos sejam cidadãos críticos e participativos na sociedade, “é fundamental que o professor use exemplos reais e interessantes e estimule o sentido crítico dos alunos, permitindo-lhes experimentar e criticar um variado tipo de situações na sala de aula para ficarem melhor preparados para as diversas situações da sua vida” (Ribeiro, 2005, p. 47).

Contudo, não é suficiente “selecionar boas tarefas – é preciso ter atenção ao modo de as propor e de conduzir a sua realização na sala de aula” (Ponte, 2005, p. 12). Por tudo isto, pode-se então concluir que “o professor tem assim um papel fundamental tanto na planificação das atividades como na sua condução ao envolver os alunos no trabalho que se está a realizar e em manter, ao longo do mesmo, o seu interesse pelas questões esclarecedoras e estimulantes que realiza” (Carvalho, 2006, p. 14).

Para o desenvolvimento deste estudo interessaram as “tarefas que enfatizam o raciocínio e o pensamento estatístico, a interpretação e a capacidade crítica e de reflexão” (Fernandes, 2009, p. 4) pois este tipo de tarefas proporcionam aos alunos condições ótimas para desenvolver diferentes estratégias de resolução que é o assunto principal deste estudo.

Vários estudos têm sido feitos para melhorar o ensino da Estatística. Os autores que se têm dedicado ao estudo do ensino e da aprendizagem da Estatística sugerem que “os trabalhos em pequenos grupos revelam ser a forma ideal para fazer Estatística nas aulas de Matemática” (Carvalho, 2006, p. 12).

O tipo de tarefas referido anteriormente incentiva e valoriza o trabalho em grupo, uma vez que este método de trabalho permite expor os alunos aos pontos de vista de outros membros do grupo e promove a reflexão e a discussão como parte essencial do processo de se tornarem práticos competentes e reflexivos (Petocz & Reid, 2007). O trabalho em grupo permite também que os alunos desenvolvam a

autonomia e a capacidade de comunicação visto que estes necessitam de convencer os colegas de grupo da sua estratégia.

Num estudo elaborado por Carvalho (2001) observou-se que o trabalho colaborativo nas díades “facilitou a apropriação de conhecimentos e a mobilização de competências estatísticas, nomeadamente porque há estratégias que são descobertas através de uma co-elaboração e que os alunos se revelam capazes de [as] continuar a utilizar quando voltam a trabalhar individualmente” (p. 472). Também Roa, Correia e Fernandes (2009) referem que foi notório o reconhecimento dos alunos sobre o contributo do trabalho em pequenos grupos para sua aprendizagem, designadamente para que surgissem ideias diferentes, para promover a sua participação na realização das tarefas e para superar dúvidas e dificuldades por eles sentidas.

As interações mantidas entre os alunos ou entre o professor e os alunos, seja ao nível do trabalho nos pequenos grupos ou ao nível do grupo-turma, constitui outra importante orientação para o ensino e a aprendizagem da Estatística. Smith, Hughes, Engle e Stein (2009) sugerem cinco práticas que permitem orientar de modo mais eficaz a condução das discussões desenvolvidas na sala de aula: (1) antecipar as resoluções dos alunos em tarefas matemáticas desafiadoras; (2) monitorizar o trabalho dos alunos e o seu envolvimento nas tarefas; (3) selecionar determinados alunos para apresentarem o seu trabalho; (4) sequenciar as resoluções dos alunos que serão apresentadas; (5) estabelecer conexões entre resoluções e ideias matemáticas.

Atualmente, o uso das tecnologias de informação e comunicação, através de software específico de Estatístico ou recorrendo à internet, no ensino e na aprendizagem da Estatística é amplamente preconizado por educadores e investigadores, mais frequentemente no tema de Estatística do que em qualquer outro tema de Matemática. Segundo Branco e Martins (2002) o uso das tecnologias “é, hoje em dia, um aspeto fundamental da prática da Estatística” (p. 13) e Jolliffe (2007) advoga que as maiores alterações do ensino da Estatística são consequência da revolução tecnológica.

Relativamente à Estatística, ultimamente têm surgido alguns estudos no sentido de identificar dificuldades e estratégias de resolução dos alunos. No que diz respeito às estratégias de resolução destaca-se o estudo de Carvalho (2001). Este estudo envolveu um total de 533 alunos do 7º ano de escolaridade que se dividiram para estabelecer um grupo de controlo e um grupo experimental. Este segundo grupo realizou, em pares, tarefas não-habituais de Estatística, isto é, tarefas estatísticas em que “os alunos não encontram orientações claras acerca de como as realizar uma vez que a própria formulação da pergunta está concebida de forma a deixar diversas possibilidades de resolução em aberto” (Carvalho, 2001, p. 244).

Um dos objetivos deste estudo foi pesquisar quais as estratégias mais frequentes utilizadas pelos alunos quando realizam tarefas não-habituais de Estatística, tendo sido possível identificar cinco estratégias de resolução: a estratégia por tentativa e erro, a estratégia de representação gráfica com e sem suporte estatístico, a estratégia de produção escrita com e sem suporte estatístico, a estratégia aritmética e, por fim, a estratégia algébrica.

A estratégia de resolução por tentativa e erro “consiste em experimentar diversas soluções e verificar qual delas corresponde ao valor pretendido” (Carvalho, 2001, p. 244). De acordo com César (1994), “o grau de sucesso atingido pelas díades com este tipo de estratégia é variável, uma vez que está relacionado com a capacidade de intuição Matemática e de persistência dos sujeitos” (Carvalho, 2001, p. 246).

Quando na sua resolução a díade recorre a alguma forma visual diz-se que utiliza uma estratégia de resolução de representação gráfica. Segundo a autora, “foi possível encontrar dois tipos de estratégia de resolução gráfica: uma, com suporte estatístico, quando os alunos recorriam a este tipo de conhecimentos para a sua resolução; outra, sem suporte estatístico, quando os alunos não o utilizavam para resolver a tarefa” (p. 248).

A autora designa de estratégia de produção escrita quando os alunos “recorriam a textos, a questionários por eles concebidos ou a um plano de como executavam o trabalho estatístico como forma

de resolverem o problema” (p. 256). À semelhança da estratégia anterior também esta pode ser dividida em dois tipos: com suporte estatístico, quando os alunos incluem na sua resolução argumentos estatísticos; e sem suporte estatístico, quando apenas recorrem a argumentos de tipo social, cultural ou político.

A estratégia aritmética significa que o aluno “recorreu apenas às quatro operações básicas matemáticas para resolver o problema” (César, 1994, p. 255). No estudo de Carvalho (2001) esta foi a estratégia mais utilizada pelos alunos.

Por fim, a estratégia de resolução algébrica subentende que os alunos são capazes de pôr o problema em equação e resolvê-lo (César, 1994). No estudo realizado por Carvalho (2001) esta estratégia surge com pouca frequência, o que leva a autora a concordar com Gattuso e Mary (1995) quando estas autoras salientam que “nos anos de escolaridade elementar são poucas as crianças que escolhem e aplicam com sucesso este tipo de estratégia mais abstrata” (citado em Carvalho, 2001, p. 267).

2. Metodologia

Neste texto aborda-se parte de um estudo mais amplo, inserido no Mestrado em Ensino da Matemática no 3º ciclo do Ensino Básico e do Ensino Secundário, na Universidade do Minho, tendo por objetivos: 1. Caracterizar as estratégias de resolução usadas pelos alunos nas tarefas estatísticas; 2. Reconhecer as potencialidades e limitações das estratégias de resolução usadas pelos alunos; 3. Envolver os alunos em discussões no grupo-turma de modo a avaliarem as suas estratégias.

A intervenção de ensino desenvolveu-se numa turma do 7º ano de escolaridade, com 19 anos, de uma escola do concelho de Barcelos. Os alunos, com 12 anos de média de idades, eram maioritariamente do sexo feminino e pelas observações realizadas verificou-se que, em geral, não tinham muitos hábitos de trabalho e apresentavam dificuldades a nível do raciocínio matemático e da comunicação matemática.

Na implementação da intervenção de ensino, os alunos exploraram tarefas tendencialmente abertas, trabalharam em grupo e tiveram acesso a um ou dois computadores por grupo de modo a poderem recorrer à folha de cálculo sempre que achassem pertinente. Com estas metodologias, que constituem orientações atuais para o ensino da Estatística, pretendeu-se colmatar tanto o desinteresse de alguns alunos face à Matemática como algumas dificuldades dos alunos envolvidos.

No caso do trabalho em grupo, os alunos organizaram-se em seis grupos com quatro ou três alunos e foi nos grupos que primeiramente os alunos exploraram as tarefas de forma mais autónoma. Uma vez terminada a exploração das tarefas nos grupos, desenvolviam-se discussões coletivas, no grupo-turma, em que os alunos eram convidados a partilhar e a explicar aos colegas a forma como pensaram. Com estas discussões pretendeu-se que os alunos conhecessem, discutissem e validassem as estratégias dos colegas, de modo a fomentar a participação de outros alunos na discussão.

A recolha de dados foi realizada através de uma ficha de avaliação diagnóstica, aplicada antes da intervenção de ensino, das gravações audiovisuais das aulas, das produções escritas dos alunos e de uma ficha de avaliação final. Todos estes métodos tiveram como objetivo obter informações variadas e essenciais para o presente estudo e permitiram, sobretudo as produções escritas, analisar as estratégias adotadas pelos alunos na exploração das tarefas propostas.

Assim o estudo desenvolveu-se ao longo de três momentos: pré-intervenção; intervenção propriamente dita e pós-intervenção. No primeiro momento, pré-intervenção, os alunos resolveram uma ficha de avaliação diagnóstica de Estatística para aferir os seus conhecimentos e adequar estratégias de ensino para esta unidade. Na intervenção propriamente dita os alunos resolveram, em grupo, tarefas pouco usuais no ensino da estatística. Por fim, na pós-intervenção os alunos resolveram uma ficha de avaliação sobre as medidas de tendência central. No presente texto aborda-se, fundamentalmente, o momento de pós-intervenção.

3. Estratégias e dificuldades dos alunos

Nesta secção analisam-se as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução das questões da ficha de avaliação, referindo-se também os objetivos de cada questão, assim como as dificuldades sentidas pelos alunos nas várias questões, as quais versavam, fundamentalmente, as medidas de tendência central.

Questão 1

As classificações obtidas, pelas raparigas da tua turma, no último teste de Matemática do 1º período encontram-se registadas no quadro seguinte.

Classificações das raparigas da turma					
20	64	76	83	58	40
56	31	42	12	78	97

1.1. Determina a média, a moda e a mediana das classificações das raparigas da tua turma.

1.2. Uma das alunas da turma obteve, neste teste, a classificação de 58%. Qual foi a sua classificação no teste anterior sabendo que a média dos dois testes foi 72%? Explica o teu raciocínio.

A alínea 1.1 da ficha de avaliação tem por objetivo calcular a média, a moda e a mediana de um conjunto de dados relativo às classificações das raparigas da turma, enquanto na alínea 1.2 se pretende testar a capacidade de determinar um dado desconhecido com base no conhecimento de outro dado e da média dos dois dados. Note-se que os dados usados nesta tarefa dizem respeito às raparigas da própria turma onde se desenvolveu o estudo. Na Tabela 1 podem ver-se as estratégias usadas pelos alunos na determinação das três medidas de tendência central inquiridas na alínea 1.1.

Tabela 1 – Descrição das estratégias apresentadas pelos alunos na alínea 1.1

Estratégia	% de alunos
Média	
E1 – Aplica o algoritmo da média.*	68,4
E2 – Soma todos os valores presentes no enunciado.	10,5
E3 – Soma todos os valores presentes no enunciado e divide o resultado por 10.	5,3
E4 – Apresenta um valor errado para a média sem efetuar cálculos.	10,5
Não responde.	5,3
Moda	
E5 – Identifica corretamente a moda.*	73,7
E6 – Apresenta um valor errado para a moda.	10,5
Não responde.	15,8
Mediana	
E7 – Organiza os dados num diagrama de caule-e-folhas e determina corretamente a mediana.*	15,8
E8 – Ordena os valores e determina corretamente a mediana.*	21,1
E9 – Ordena os valores mas não determina corretamente a mediana.	10,5
E10 – Organiza os dados num diagrama de caule-e-folhas mas não determina corretamente a mediana.	31,6
Não responde.	21,1

Nota: a estratégia assinalada com o asterisco (*) conduziu a respostas corretas.

Como se pode ver pela Tabela 1, a mediana foi a medida de tendência central com maior percentagem de respostas incorretas (42,1%), seguida da média com 26,3% e da moda com 10,5%. Relativamente às estratégias, pode ver-se que para a determinação da mediana se destaca com 47,4% a estratégia em que os alunos recorreram a elaboração de um diagrama de caule-e-folhas. Contudo, apenas 15,8% destes determinam corretamente a mediana. Dos restantes 31,6%, 10,5% cometem o erro de usar apenas as folhas do diagrama para determinar a mediana, como se pode ver na resolução do aluno A13, apresentada na Figura 1.

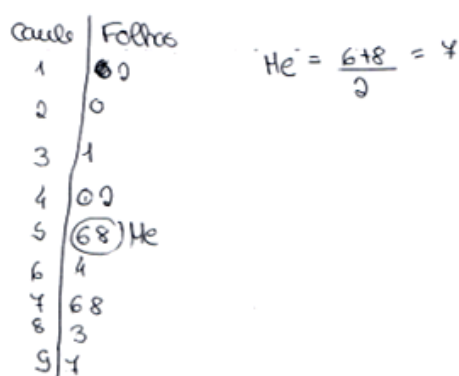


Figura 1. Resposta dada pelo aluno A13 na alínea 1.1.

A segunda estratégia mais usada para determinar a mediana foi a de ordenar os valores para determinar esta medida, com 31,6% de alunos. Destes, apenas 10,5% determinaram erradamente a mediana por, apesar de o número de dados ser par, determinarem a mediana como se esse número fosse ímpar.

Dos 73,7% alunos que responderam corretamente à moda, 15,8% apresentaram ainda uma justificação para a não existência de moda, como por exemplo: “não há moda porque nenhum número se repete mais do que uma vez” e “não há moda pois todas as classificações são diferentes”. Relativamente às estratégias para a determinação da média, pode ver-se que a maioria dos alunos usou o algoritmo da média. A estratégia E3 parece resultar de alguma distração por parte do aluno que a utilizou pois não se percebe o valor 10 como denominador do algoritmo da média. Salienta-se, por fim, que a percentagem de alunos que não responde a cada uma das medidas vai aumentando, sendo a média a medida com mais alunos a responder e a mediana com menos alunos a responder.

Relativamente à alínea 1.2, as estratégias adotadas pelos alunos encontram-se na Tabela 2.

Tabela 2 – Descrição das estratégias apresentadas pelos alunos na alínea 1.2

Estratégia	% de alunos
E11 – Coloca o problema em equação.*	31,6
E12 – Resolve o problema por tentativa-e-erro.*	26,3
E13 – Efetua cálculos (somas ou subtrações) com valores presentes no enunciado.	21,1
E14 – Apresenta um valor errado sem efetuar cálculos.	10,5
Não responde.	10,5

Nota: a estratégia assinalada com o asterisco (*) conduziu a respostas corretas.

Pela análise da Tabela 2, pode constatar-se que 57,9% dos alunos respondeu corretamente a esta questão. De salientar que a estratégia E11 foi a mais usada pelos alunos e é, sem dúvida, mais difícil e abstrata que a segunda estratégia mais usada. Na Figura 2 pode ver-se a resposta do aluno A13 que adotou a estratégia E11.

$$\frac{86 + 58}{2} = 72 \quad \begin{aligned} 58 + x : 2 &= 72 \Leftrightarrow 58 + x = 72 \times 2 \\ &\Leftrightarrow 58 + x = 144 \\ &\Leftrightarrow x = 144 - 58 \\ &\Leftrightarrow x = 86 \end{aligned}$$

R: A classificação no teste anterior foi 86%.

Figura 2. Resposta dada pelo aluno A13 na alínea 1.2.

A estratégia E12 foi a segunda estratégia mais usada pelos alunos, com 26,3%. Contudo, 10,5% dos alunos que usaram esta estratégia não apresentaram as tentativas que os levaram à resposta correta. Esta omissão pode explicar-se pelo facto de alguns alunos terem o hábito de resolver as fichas de avaliação a lápis e no final passar a caneta, não o tendo feito por esquecimento ou falta de tempo. Nos restantes 15,8% é evidente a utilização de uma estratégia por tentativa e erro. Na Figura 3 pode observar-se um exemplo do uso desta estratégia, em que o aluno A2 foi testando valores até encontrar um valor que satisfizesse o enunciado do problema.

$$\begin{aligned} 58 + 36 &= 94 \\ 94 : 2 &= 47 \\ 72 : 2 &= 36 \end{aligned} \quad \begin{aligned} 58 + 50 &= 108 \\ 108 : 2 &= 54 \end{aligned} \quad \begin{aligned} 58 + 85 &= 143 \\ 143 : 2 &= 71,5 \end{aligned}$$

R: Eu fui fazendo por esta tentativa erro e cheguei à conclusão que ela tirou 86 no teste.

$$\left\{ \begin{aligned} 58 + 86 &= 144 \\ 144 : 2 &= 72 \end{aligned} \right.$$

Figura 3. Resposta dada pelo aluno A2 na alínea 1.2.

Relativamente à estratégia E13, ela foi adotado por 21,1% dos alunos. Observando a resolução do aluno A5, apresentada na Figura 4, parece que os alunos não entenderam o problema e, na expectativa de angariar alguns pontos na ficha de avaliação, escreveram qualquer coisa.

A Aluna tirou 58% neste teste sendo a média dos testes 72%. no teste anterior tirou 14%

$$\begin{array}{r} 72\% \\ - 58\% \\ \hline 14\% \end{array}$$

Figura 4. Resposta dada pelo aluno A5 na alínea 1.2.

Questão 2

Num certo dia, no hospital de uma determinada localidade, foram observadas crianças com idade inferior a 3 anos. O registo das idades, em meses, foi organizado no seguinte diagrama de caule-e-folhas:

0	3 6 6 7
1	0 1 1 2 4 6 8
2	2 7 7
3	0 2 4

Determina a mediana das idades das crianças.

Com esta questão pretendia-se que os alunos interpretassem o diagrama de caule-e-folhas e, de seguida, determinassem a mediana das idades das crianças. Na Tabela 3 apresentam-se as estratégias usadas pelos alunos na resolução desta questão.

Tabela 3 – Descrição das estratégias apresentadas pelos alunos na questão 2

Estratégia	% de alunos
E15 – Apresenta um valor correto para a mediana.*	36,8
E16 – Apresenta um valor incorreto para a mediana.	47,4
Não responde	15,8

Nota: a estratégia assinalada com o asterisco (*) conduziu a respostas corretas.

Como se pode constatar na Tabela 3, a percentagem de alunos que respondeu corretamente foi de 36,8%. Relativamente à estratégia que conduziu à resposta correta, E15, os alunos dividiram o número total de elementos por dois e constataram que a mediana se encontra na posição nove do diagrama de caule-e-folhas. No caso da estratégia E16, verificaram-se essencialmente dois tipos de erro: (i) 21,1% dos alunos determinam corretamente a posição da mediana, mas apenas consideram as folhas, isto é, afirmam que a mediana é 4, em vez de 14; (ii) 26,3 % dos alunos não determinam corretamente a posição da mediana. Esta dificuldade por ter resultado de alguma distração por parte dos alunos. Comparando a percentagem de alunos que não respondeu a esta questão com a percentagem de alunos que não respondeu à alínea 1.1 desta ficha de avaliação, verifica-se uma ligeira descida. Este facto pode ter resultado de os alunos, nesta questão, terem o gráfico de caule-e-folhas, isto é, terem os dados já ordenados, o que pode ter facilitado.

Questão 3

Escolheram-se cinco alunos da tua escola. Acerca das idades, em anos, desses alunos sabe-se que a média é 14 anos, a mediana é 13 anos e a moda é 12 anos. Quais as possíveis idades, em anos, dos cinco alunos?

Com esta tarefa pretendeu-se que os alunos determinassem as idades dos cinco alunos, tendo em atenção a média, a mediana e a moda. Podem ver-se na Tabela 4 as estratégias adotadas pelos alunos nesta questão.

Tabela 4 – Descrição das estratégias apresentadas pelos alunos na questão 3

Estratégia	% de alunos
E17 – Indica cinco valores que verificam as estatísticas presentes no enunciado (média, moda e mediana).*	27,8
E18 – Indica cinco valores que verificam o valor da média e da moda.	5,6
E19 – Indica cinco valores que verificam apenas uma das estatísticas presentes no enunciado.	38,9
E13 – Efetua cálculos com valores presentes no enunciado.	5,6
Não responde.	22,1

Nota: a estratégia assinalada com o asterisco (*) conduziu a respostas corretas.

Pela observação das produções escritas, parece que 72,3% dos alunos usaram uma estratégia de compensação e de tentativa-e-erro simultaneamente, dando origem a três situações diferentes:

- (i): 38,9% dos alunos tiveram em consideração apenas uma das medidas ignorando as restantes, obtendo, por exemplo, os seguintes conjuntos de valores: “14, 14, 14, 14, 14”; “12, 12, 12, 13, 14” e “12, 12, 13, 14, 14”.

- (ii): 27,8% dos alunos tiveram em consideração as três medidas, obtendo, por exemplo, os seguintes conjuntos: “12, 16, 13, 12, 17” e “12, 12, 13, 15, 18”.
- (iii): 5,6% dos alunos tiveram em consideração a média e a moda, ignorando a mediana.

Na Figura 5 exemplifica-se uma resolução correta da questão, onde parece que o aluno A16 combina a estratégia por tentativa-e-erro com a estratégia por compensação.

$$\begin{aligned}
 14 \times 5 &= 70 \quad \text{e} \quad \text{outros cálculos riscados} \\
 14 + 18 + 13 + 12 + 12 &= 68 \quad \text{e} \quad 68 : 5 = 13,6 \\
 14 + 12 + 13 + 12 + 12 &= 63 \quad \text{e} \quad 63 : 5 = 12,6 \\
 14 + 13 + 13 + 12 + 12 &= 70 \quad \text{e} \quad 70 : 5 = 14
 \end{aligned}$$

As possíveis idades eram 14, 13, 13, 12, 12

Figura 5. Resposta dada pelo aluno A16 na questão 3.

Relativamente à estratégia E19, pode dizer-se que dos 38,9% alunos, 27,8% consideraram apenas a moda, 5,6% tiveram em consideração apenas a média e 5,6% consideraram apenas a mediana. A percentagem de alunos que não respondeu a esta questão (22,1%) revela-se preocupante.

Questão 4

Num Jardim Zoológico há quatro girafas com o peso médio de 850 quilos. Juntou-se outra girafa ao grupo com o peso de 500 quilos. Determina, agora, a média dos pesos das cinco girafas.

Nesta questão pretendeu-se que os alunos interpretassem o significado de média e após a inserção de um novo dado determinassem a nova média. Na Tabela 5 podem ver-se as estratégias utilizadas pelos alunos nesta questão.

Tabela 5 – Descrição das estratégias apresentadas pelos alunos na questão 4

Estratégia	% de alunos
E29 – Atribui o peso de 850 quilos a cada uma das 4 girafas. De seguida, soma o peso de cada uma destas girafas com o peso da nova girafa e divide o resultado (3900kg) por 5. Por fim, afirma que a média do peso das 5 girafas é 780 quilos.*	21,1
E21 – Atribui o peso de 850 quilos a cada uma das 4 girafas. De seguida, soma o peso de cada uma destas girafas com o peso da nova girafa e divide o resultado (3900kg) por 2. Por fim, afirma que a média do peso das 5 girafas é 1950 quilos.	5,3
E22 – Atribui o peso de 850 quilos a cada uma das 4 girafas. De seguida, soma o peso de cada uma destas girafas com o peso da nova girafa obtendo o resultado de 3900 quilos.	5,3
E23 – Soma à média dos pesos das 4 girafas o peso da nova girafa e, de seguida, divide o valor obtido por 5. Por fim, afirma que a média do peso das 5 girafas é 270 quilos.	21,1
E24 – Soma à média dos pesos das 4 girafas o peso da nova girafa e, de seguida, divide o valor obtido por 2 (lei do fecho). Por fim, afirma que a média do peso das 5 girafas é 675 quilos.	5,3
E25 – Soma à média dos pesos das 4 girafas o peso da nova girafa e, de seguida, afirma que a média do peso das 5 girafas é 1350kg.	5,3
E26 – Soma à média dos pesos das 4 girafas o peso da nova girafa obtendo o	5,3

valor de 1350kg. De seguida indica quatro valores cuja soma é 1350 e divide por 4. Por fim, afirma que a média do peso é 337,5kg.

E27 – Multiplica a média dos pesos das 4 girafas pelo peso da nova girafa e, de seguida, divide o valor obtido por 5. Por fim, afirma que a média do peso das 5 girafas é 85000 quilos. 5,3

E28 – Divide a média do peso das 4 girafas pelas 4 girafas. De seguida, a este resultado (212.5) soma o peso da nova girafa. Por fim, afirma que a média do peso das 4 girafas é 712,5. 5,3

E29 – Apresenta dois valores para a média. 5,3

Não responde 15,8

Nota: a estratégia assinalada com o asterisco (*) conduziu a respostas corretas.

Nesta questão importa salientar que 31,7% dos alunos parecem compreender o significado de média pois começam por atribuir o valor da média a cada uma das quatro girafas. Destes alunos, 21,1% usaram a estratégia E29, que conduziu à resposta correta, que se exemplifica na Figura 6. Esta estratégia já tinha sido usada na fase inicial da intervenção, contudo, com uma menor frequência e, tal como nesta questão, foi a única estratégia que conduziu à resposta correta.

$$850 + 850 + 850 + 850 + 500 = 3900$$

$$\frac{3900}{5} = 780$$

Figura 6. Resposta dada pelo aluno A15 na questão 4.

A resolução apresentada na Figura 6 apesar de conter um erro de escrita matemática (a primeira igualdade não está correta uma vez que a primeira soma devia também ser dividida por 5) subentende um raciocínio que levou à resposta correta.

Considerando a grandeza de um valor razoável para o peso médio das cinco girafas, pode-se avaliar quão são acrílicos os alunos ao apresentarem os valores resultantes da adoção das estratégias E21, E22, E23, E25, E26 e E27, seja porque se trata de um valor excessivamente pequeno ou excessivamente elevado relativamente ao que seria expectável.

4. Conclusões

De seguida, apresentam-se os resultados mais relevantes para cada uma das estatísticas consideradas nas questões analisadas e, sempre que possível, comparam-se com estudos que abordam a mesma temática.

Média

No cálculo da média simples (alínea 1.1) 68,4% dos alunos conseguiram aplicar corretamente o algoritmo da média e 10,5% dos alunos ainda apresentaram dificuldades no uso do algoritmo da média, somando as idades dos alunos mas não dividindo pelo número total de alunos.

O cálculo da média ponderada foi um assunto tratado ao longo de toda a intervenção. Este foi um assunto problemático para a maioria dos alunos, sendo que, na pós-intervenção (questão 4), a percentagem de alunos que respondeu corretamente a esta questão foi de 21,1%. A estratégia que conduziu à resposta correta resume-se à aplicação do algoritmo da média ponderada.

Relativamente às dificuldades sentidas pelos alunos, surgiram três erros que se tinham verificado ao longo da intervenção. No primeiro, os alunos somam os valores do enunciado, esquecendo-se de

ponderar estes valores, e de seguida dividem pelo total de elementos do conjunto. Na pós-intervenção 21,1% dos alunos cometeu este erro. No segundo erro, os alunos calculam a média dos valores do enunciado, isto é, aplicam a lei do fecho. Na pós-intervenção a percentagem de alunos que cometeu este erro foi de 5,3%. No estudo de Boaventura (2003), com alunos do ensino secundário, este erro verificou-se em 50,8% dos casos. Já no estudo de Barros (2003), com futuros professores do 1º e 2º ciclo, este erro observou-se em 29,7% dos casos. Por fim, no terceiro erro, os alunos apenas somam os valores do enunciado. Este erro verificou-se em 5,3% dos casos. No estudo de Barros (2003) este erro observou-se em 5,4% dos casos. Tal como refere esta autora, “é limitada a compreensão relacional do conceito de média, pois os alunos atribuíram-lhe um valor superior a qualquer das médias dadas” (p. 94).

Tal como aconteceu no estudo de Boaventura, o conceito de média nas questões em que era necessário trabalhá-lo em conjunto com a moda e a mediana (questão 3) ofereceu muitas dificuldades aos alunos, com apenas 27,8% dos alunos a conseguir apresentar uma resposta correta. Nesta questão, uma percentagem significativa de alunos (38,9%) apresentou cinco valores para os dados que verificam apenas uma das estatísticas referidas no enunciado. Esta estratégia de resolução também se verificou no estudo de Boaventura (2003), que salienta a dificuldade dos alunos em interligar as três medidas de tendência central.

Em suma, tal como afirma Boaventura (2003) no seu estudo, “a média revelou-se um conceito problemático em situações cuja resposta abrangia um raciocínio para além do cálculo de uma média aritmética simples” (p. vi).

Moda

Neste estudo constatou-se que o conceito de moda foi o melhor adquirido pelos alunos, tendo sido das, três medidas de tendência central, aquela que causou menos dificuldades.

A identificação correta da moda num conjunto de dados não organizados foi de 73,7% na pós-intervenção (alínea 1.1). Relativamente às dificuldades sentidas pelos alunos, apenas se verificou uma dificuldade ocorrida na fase de pré-intervenção (ficha de avaliação diagnóstica), em que alguns alunos identificaram a moda como o valor menos frequente do conjunto de dados.

Mediana

A mediana é um conceito novo para os alunos do 7º ano de escolaridade uma vez que é incluída pela primeira vez neste ano de escolaridade. Na alínea 1.1, da ficha de avaliação, a percentagem de respostas corretas foi de 36,9% e verificaram-se, essencialmente, duas estratégias de resolução: uma em que os alunos começaram por organizar os dados num diagrama de caule e folhas e, de seguida, encontraram a mediana; e outra em que os alunos ordenaram os dados por ordem crescente e, posteriormente, calcularam a mediana. A primeira estratégia foi adotada por 47,4% dos alunos e destes apenas 15,8% apresentaram o valor correto para a mediana. Dos restantes 31,6% que recorreram a esta estratégia, 10,5% usaram apenas as folhas do diagrama para calcular a mediana e os restantes calcularam a mediana como se o número de elementos do conjunto fosse ímpar. A percentagem de alunos que recorreu à segunda estratégia foi de 31,6% e, tal como na estratégia anterior, 10,5% destes determinou a mediana como se o número de elementos do conjunto fosse ímpar.

Ainda na ficha de avaliação, os alunos foram confrontados com o cálculo da mediana numa situação em que os dados estavam representados num diagrama de caule-e-folhas (questão 2). Nesta questão, 36,8% dos alunos determinaram a posição na qual se encontra a mediana e afirmaram corretamente que a mediana das idades era 14 meses. Dos 47,4% de alunos que respondem incorretamente, 21,1% determinou a posição correta da mediana mas afirmou que a mediana era 4 meses, ou seja, tendo apenas em consideração as folhas do diagrama; e os restantes 26,3% não determinaram corretamente a posição da mediana.

Finalmente, o conceito de mediana, quando aplicado em conjunto com a média e a moda, abordado na questão 3 da ficha de avaliação, revelou-se muito difícil para os alunos pois apenas 27,8%

conseguiu encontrar um conjunto de cinco elementos conhecidas as medidas de tendência central, média, moda e mediana.

Potencialidades e limitações das estratégias de resolução usadas pelos alunos

Ao longo de todas as resoluções dos alunos, relativas à pré-intervenção, intervenção e pós-intervenção, identificaram-se estratégias variadas, as quais nem sempre conduziram a respostas corretas. Especificamente, no decorrer deste estudo, surgiram 5 estratégias diferentes: estratégia de tentativa-e-erro; estratégia de compensação; estratégia de representação gráfica; estratégia aritmética e, por fim, estratégia algébrica. A estratégia mais frequente ao longo de toda a intervenção foi a estratégia aritmética (70,8%), seguida da estratégia de compensação (12,5%), da estratégia de representação gráfica (10,4%), da estratégia algébrica (4,2%) e, por fim, da estratégia de tentativa-e-erro (2,1%).

Em questões cujas medidas de tendência central eram conhecidas e se pedia que os alunos encontrassem um conjunto de dados que as satisfizesse, surgiu maioritariamente a estratégia de compensação. Por vezes, esta estratégia surgiu em simultâneo com a estratégia de tentativa-e-erro. Contudo, nem sempre esta estratégia de compensação conduziu a respostas corretas. Relativamente à eficácia desta estratégia conclui-se que é uma estratégia eficaz neste tipo de questões, mas, no entanto, é pouco aplicável aos restantes conteúdos da disciplina de Matemática.

Em questões onde se pretendia que os alunos descobrissem um dado desconhecido com base no conhecimento da média, verificou-se que a estratégia mais utilizada pelos alunos nas suas resoluções foi a estratégia algébrica (o que significa que os alunos conseguem traduzir o enunciado de um problema para uma equação e resolvê-la), seguida da estratégia de tentativa-e-erro e, por fim, da estratégia aritmética. Neste tipo de questões, à partida, parece que a estratégia mais eficaz é a estratégia algébrica pois com esta estratégia pode poupar-se tempo. Além disso, a estratégia algébrica pode ser aplicada a muitas situações da Matemática. Relativamente à segunda estratégia mais utilizada neste tipo de questões, a estratégia de tentativa-e-erro, revela-se um pouco limitada pois, tal como refere César (1994), nesta estratégia o nível de êxito atingido pelos alunos é variável, pois está relacionado com a capacidade de intuição matemática e de insistência dos sujeitos. Assim, para esta autora

quando a intuição matemática é muito boa, a persistência não desempenha um papel essencial; quando a intuição matemática é mais fraca, a persistência passa a ter um papel fundamental, pois neste caso os sujeitos precisam de experimentar muitas hipóteses até conseguirem obter uma solução correta. (p. 254)

Desta forma, um aluno com fraca intuição matemática pode demorar muito tempo na procura de uma solução. Além disso, à semelhança da estratégia de compensação, a estratégia de tentativa-e-erro é pouco aplicável na Matemática.

Nas questões em que era dada a média de um conjunto de dados, se acrescentava um novo dado e se pedia que os alunos encontrassem a nova média, todas as estratégias usadas pelos alunos foram aritméticas. Isto significa que os alunos recorreram às operações básicas da matemática (adição, subtração, multiplicação e divisão) para solucionar o problema. Nesta questão, de todas as estratégias já apresentadas, a estratégia aritmética foi a que se revelou com mais potencialidades para os alunos alcançarem a resposta correta. Além disso, tal como a estratégia algébrica, esta é uma estratégia muito aplicável na Matemática.

Nas questões onde se pedia para determinar a mediana, foi maioritariamente adotada uma estratégia de representação gráfica, em que os alunos construíram o diagrama de caule-e-folhas como forma de ordenar os dados. Contudo, nas situações em que se requer apenas a determinação da mediana seria preferível apenas ordenar os dados sem construir o diagrama de caule-e-folhas.

5. Referências

- Barros, P. M. (2003). *Os futuros professores do 2º ciclo e a estocástica: dificuldades sentidas e o ensino do tema*. Dissertação de Mestrado, Universidade do Minho, Braga, Portugal.
- Boaventura, M. G. (2003). *Dificuldades de alunos do ensino secundário em conceitos estatísticos: O caso das medidas de tendência central*. Dissertação de Mestrado, Universidade do Minho, Braga, Portugal.
- Branco, J. & Martins, M. E. G. (2002). Literacia estatística. *Educação e Matemática*, 69, 9-13.
- Branco, J. (2000). Estatística no secundário: O ensino e os seus problemas. In C. Loureiro, O. Oliveira & L. Brunheira (Orgs.), *Ensino e aprendizagem de estatística* (pp. 11-30). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Estatística, Associação de Professores de Matemática, Departamento de Educação e de Estatística e Investigação Operacional da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.
- Branco, J. A. (2006). Mudanças no ensino da estatística. *Boletim da Sociedade Portuguesa de Estatística*. 19-23.
- Carvalho, C. & César, M. (2001). Interagir para aprender: Um caso de trabalho colaborativo em estatística. In B. Silva & L. Almeida (Orgs.), *Atas do VI Congresso Galaico Português de Psicopedagogia* (vol. 2, pp. 65-80). Braga: Centro de Estudos em Educação e Psicologia da Universidade do Minho.
- Carvalho, C. (2001). *Interação entre pares: Contributos para a promoção do desenvolvimento lógico e do desempenho estatístico no 7º ano de escolaridade*. Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal.
- Carvalho, C. (2006). Olhares sobre a Educação Estatística em Portugal. In *Anais do SIPEMAT*. Recife: Programa de Pós-Graduação em Educação – Centro de Educação – Universidade Federal de Pernambuco.
- César, M. (1994). *O Papel da interação entre pares na resolução de tarefas matemáticas Trabalho em diade vs. trabalho individual em contexto escolar*. Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal.
- Fernandes, J. A. (2009). Ensino e aprendizagem da estatística: Realidades e desafios. In C. Costa, E. Mamede & F. Guimarães (Orgs.), *Atas do XIX Encontro de Investigação em Educação Matemática*. Vila Real: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, CD-ROM.
- Fernandes, J. A., Carvalho, C. & Ribeiro, S. A. (2007). Caracterização e implementação de tarefas estatísticas: um exemplo no 7º ano de escolaridade. *Revista Zetetiké*, 15(28), 27-61.
- Jolliffe F. (2007). The changing brave new world of statistics assessment. In B. Phillips & L. Weldon (Eds.), *The Proceedings of the ISI/IASE Satellite on Assessing Student Learning in Statistics*, Voorburg: International Statistical Institute.
- Lima, Y. (1998). Modernização da Matemática no Liceu: Um programa inédito de Sebastião e Silva. *Jornal de Matemática Elementar*, 174, 10-17.
- Martins, M. E. G. & Cerveira, A. G. (1999). *Introdução às Probabilidades e à Estatística*. Lisboa: Universidade Aberta.
- NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE.
- Petocz, P. & Reid, A. (2007). Learning and assessment in statistics. In Philips B. & Weldon L. (Eds.), *The Proceedings of ISI/IASE Satellite on Assessing Student Learning in Statistics*, Voorburg: International Statistical Institute, The Netherlands, CD-ROM.
- Ponte, J. P. (2005). Gestão Curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.
- Ribeiro, S. A. (2005). *O ensino da estatística no 7º ano de escolaridade: Caracterização e dificuldades sentidas pelos professores*. Dissertação de Mestrado, Universidade do Minho, Braga, Portugal.

- Roa, R., Correia, P. F. & Fernandes, J. A. (2009). Percepciones de los estudiantes de una clase de bachillerato sobre una intervención de enseñanza en Combinatoria. In María Guzmán P. (Coord.), *Arte, Humanidades y Educación: Aportaciones a sus ámbitos científicos* (pp. 323-347). Granada, Espanha: Editorial Atrio.
- Santos, C. & Pedro, C. (2000). Estatística: utilização de programas de geometria dinâmica. In C. Loureiro, O. Oliveira & L. Brunheira (Orgs.), *Ensino e aprendizagem de estatística* (pp.168-177). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Estatística, Associação de Professores de Matemática, Departamento de Educação e de Estatística e Investigação Operacional da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.
- Smith, M., Hughes, E., Engle, R. & Stein, M. (2009). Orchestrating discussions. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 14(9), 548-556.